

Komplexe Zahlen

Theorie

- a. Real- und Imaginärteil mit Beispielen und Zeichnung
- b. Betrag bzw. Radius mit Beispielen
- c. $\text{Arg}(z)$ bzw. Winkel mit Rechnung und Grafik
- d. Rechenregeln

a. Real- und Imaginärteil

$$z = x + iy$$
$$\operatorname{Re}(z) = x$$
$$\operatorname{Im}(z) = y$$

Beispiel:

$$z_1 = 1 + i$$

$$z_2 = 4 - 2i$$

$$z_3 = -4$$

$$z_4 = 3i$$

$$\operatorname{Im}(z_1) = 1$$

$$\operatorname{Im}(z_2) = -2$$

$$\operatorname{Im}(z_3) = 0$$

$$\operatorname{Im}(z_4) = 3$$

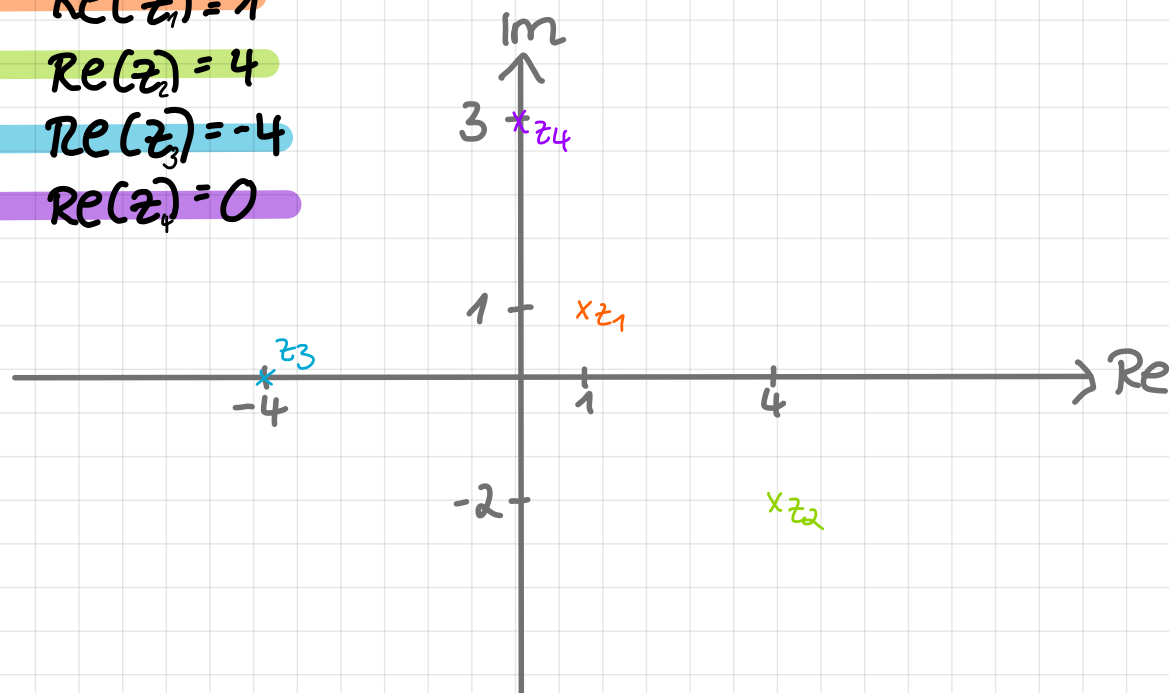
$$\operatorname{Re}(z_1) = 1$$

$$\operatorname{Re}(z_2) = 4$$

$$\operatorname{Re}(z_3) = -4$$

$$\operatorname{Re}(z_4) = 0$$

Zeichnung: $\operatorname{Im}(z_1) = 1$ $\operatorname{Re}(z_1) = 1$
 $\operatorname{Im}(z_2) = -2$ $\operatorname{Re}(z_2) = 4$
 $\operatorname{Im}(z_3) = 0$ $\operatorname{Re}(z_3) = -4$
 $\operatorname{Im}(z_4) = 3$ $\operatorname{Re}(z_4) = 0$



b. Betrag bzw. Radius

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Beispiel:

$$z_1 = 1 + \sqrt{3}i$$

$$|z_1| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$z_2 = i$$

$$|z_2| = \sqrt{1^2} = 1$$

$$z_3 = 5$$

$$|z_3| = \sqrt{5^2} = 5$$

$$z_4 = 4 - 5i$$

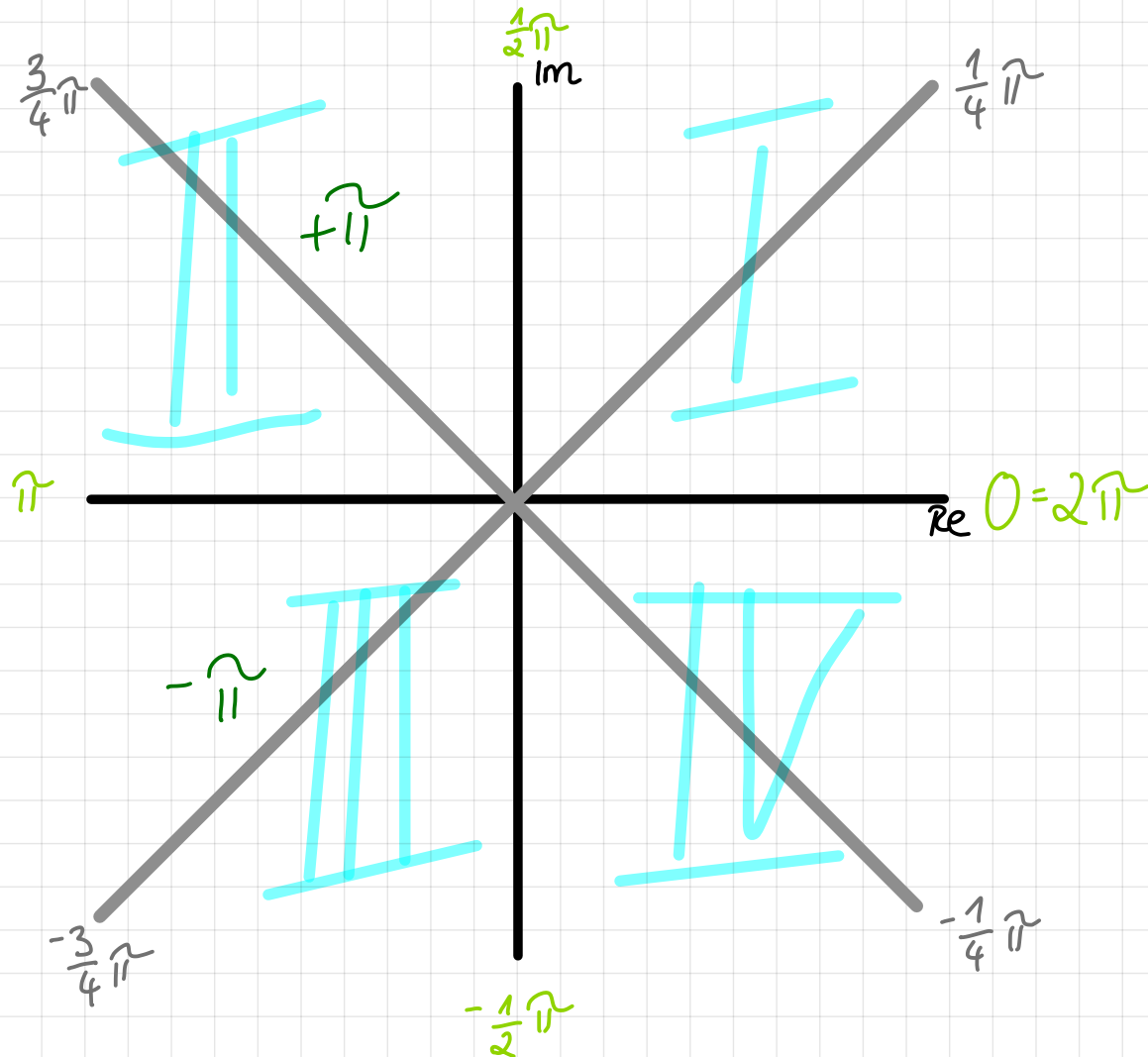
$$|z_4| = \sqrt{4^2 + (-5)^2} = \sqrt{41}$$

$$z_5 = -4 + 5i$$

$$|z_5| = \sqrt{(-4)^2 + 5^2} = \sqrt{41}$$

c. $\text{Arg}(z)$ bzw. Winkel

$$\arg(z) = \varphi = \tan^{-1} \left(\frac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)} \right)$$



d. Rechenregeln

Regeln

$$\textcircled{1} \quad z = x + iy$$

$$\bar{z} = x - iy$$

$$\textcircled{2} \quad z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = r^2 = |z|^2$$

$$\textcircled{3} \quad z = r e^{i\varphi}$$

$$\bar{z} = r e^{-i\varphi}$$

$$\textcircled{4} \quad i^2 = -1$$

Beispiele

$$z = 1 + 5i$$

$$\bar{z} = 1 - 5i$$

$$z \cdot \bar{z} = 1^2 + 5^2 = 26 \begin{matrix} \nearrow r^2 \\ \searrow |z|^2 \end{matrix}$$